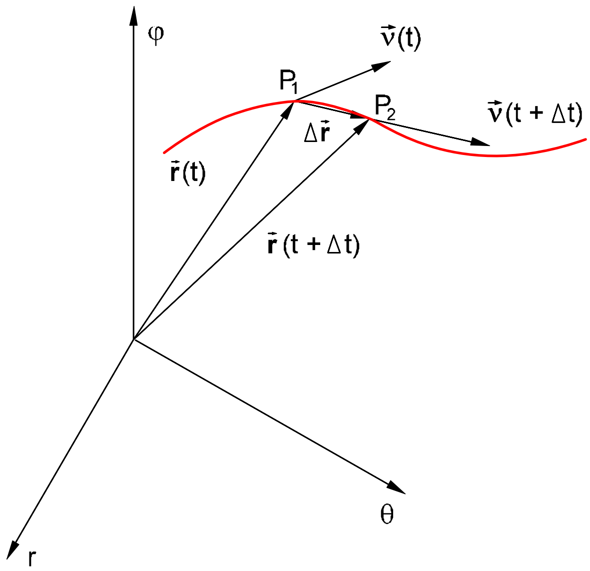
Mechanik

Die Bahnkurve eines Massenpunktes

am Beispiel der Geschwindigkeit v

Experimentalphysik 1 - Mechanik
Wolfgang Demtröder, Seite 38, ff.

Die Funktion $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ stellt eine Kurve im Raum dar, die der Massenpunkt im Laufe der Zeit durchläuft. Man nennt sie **Bahnkurve**. Die Darstellung $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ heißt Parameter-Darstellung, da die Koordinaten des Massenpunktes P (t) von dem Parameter t abhängen. Die Bewegung, die der Massenpunkt beim Durchlaufen der Bahnkurve vollführt, heißt **Translation**.



Im allgemeinen Fall ist v nicht konstant, sondern eine Funktion der Zeit. Betrachten wir einen Massenpunkt, der sich zur Zeit t im Punkte P_1 der Bahnkurve befindet. Zu einem späteren Zeitpunkt $(t + \Delta t)$ ist er bis P_2 vorgerückt. Den Quotienten

$$\frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{(t + \Delta t) - t} = \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \vec{v}$$

bezeichnen wir als **mittlere Geschwindigkeit** $\vec{v}$ auf der Strecke $\overrightarrow{P_1P_2}$. Lassen wir nun $\Delta t \longrightarrow 0$ gehen, so rückt P_2 gegen P_1 und wir definieren als die **Momentangeschwindigkeit** des Massenpunktes zur Zeit t im Punkte P_1 den Grenzwert

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \,,$$

der gleich der zeitlichen Ablenkung der Funktion $\mathbf{r}(t)$ ist.

Da die Ableitung $\dot{f}(t = t_1)$ einer Funktion die Steigung der Kurve $f(t)$ im Punkte P_1 angibt, hat die Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{r}}(t)$ in jedem Punkte der Bahnkurve $\mathbf{r}(t)$ die Richtung der Tangente in diesem Punkte. In kartesischen Koordinaten ist ihr Betrag

$$v = |v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2} \,.$$