Vektoralgebra

Der Richtungscosinus eines Vektors

Mathematik Band III
Dr.-Ing. Wilhelm Leupold, Seite 164, ff.

Außer dem Betrag (der Länge) eines Ortsvektors gehört zu seiner eindeutigen Bestimmung noch die Richtung. Diese kann durch Winkel angegeben werden, die der Vektor mit den Grundvektoren $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ und $\vec{e}_z$ der Basis bildet. Werden diese Winkel mit α, β und γ bezeichnet, so gilt:

$$\cos\left(\vec{a}, \vec{e}_x\right) = \cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} = \frac{a_x}{a} = \frac{x}{a}$$

$$\cos\left(\vec{a}, \vec{e}_y\right) = \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} = \frac{a_y}{a} = \frac{y}{a}$$

$$\cos\left(\vec{a}, \vec{e}_z\right) = \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|} = \frac{a_z}{a} = \frac{z}{a}$$

$\cos\alpha$, $\cos\beta$ und $\cos\gamma$ heißen die **Richtungscosinus** von $\vec{a}$. Die Winkel $\alpha = \sphericalangle\left(\vec{a}, \vec{e}_x\right)$, $\beta = \sphericalangle\left(\vec{a}, \vec{e}_y\right)$ und $\gamma = \sphericalangle\left(\vec{a}, \vec{e}_z\right)$ sind spitz oder stumpf, je nachdem a_x, a_y und a_z positiv oder negativ sind. d. h., je nachdem die Komponenten $\mathbf{a}_x$, $\mathbf{a}_y$ und $\mathbf{a}_z$ den Grundvektoren $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ und $\vec{e}_z$ gleich oder entgegengesetzt gerichtet sind.

Wegen $a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = a^2$ gilt $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \dfrac{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}{a^2} = \dfrac{a^2}{a^2} = 1$,

die Quadratsumme der Richtungscosinus ist immer 1.

Daraus folgt:

a) Die drei Richtungscosinus sind voneinander abhängig. Bei vorgegebenen α und β ist z. B. $\cos\gamma = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta}$

b) Von den drei Winkeln kann immer nur einer kleiner als 45° sein. Wären nämlich zwei Winkel kleiner als 45°, z. B. α und β, so wäre $\cos^2\alpha > \frac{1}{2}$ und $\cos^2\beta > \frac{1}{2}$ und somit $\cos\gamma = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta}$ imaginär. Aus

$\cos\alpha = \dfrac{a_x}{|\vec{a}|}$, $\cos\beta = \dfrac{a_y}{|\vec{a}|}$ und $\cos\gamma = \dfrac{a_z}{|\vec{a}|}$ folgt für die Koordinaten des Vektors $\vec{a}$

$a_x = |\vec{a}|\cos\alpha$, $a_y = |\vec{a}|\cos\beta$, $a_z = |\vec{a}|\cos\gamma$. Damit ist es nunmehr möglich, einen Vektor $\vec{a}$ mit Hilfe seiner Bestimmungsgrößen Betrag und Richtung zu schreiben:

$$\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z = |\vec{a}|\vec{e}_x\cos\alpha + |\vec{a}|\vec{e}_y\cos\beta + |\vec{a}|\vec{e}_z\cos\gamma$$

$$\vec{a} = |\vec{a}|\left(\vec{e}_x\cos\alpha + \vec{e}_y\cos\beta + \vec{e}_z\cos\gamma\right)$$

Im besonderen Falle eines Einsvektors gilt wegen $|\vec{a}^0| = 1$ $\quad \vec{a}^0 = \vec{e}_x\cos\alpha + \vec{e}_y\cos\beta + \vec{e}_z\cos\gamma$

Die Koordinaten eines Einsvektors sind seine Richtungscosinus.