Elementarmathematik

Der binomische Lehrsatz

Mathematik Band I
Dr. Willy Bennewitz, Seite 235, ff.

Der binomische Lehrsatz gibt einen allgemeingültigen Ausdruck für $(a \pm b)^n$, wobei n eine ganze positive Zahl ist.
Er hat durch Anwendung der symbolischen Schreibweise $\binom{n}{k}$ die Form:

$$(a + b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-2} a^{n-2}b^2 + \binom{n}{n-1} a^{n-1}b + b^n.$$

Ist b negativ, so wechseln die Vorzeichen sich ab, z. B. in der Gleichung

$$(a - b)^5 = a^5 - \binom{5}{1} a^4 b + \binom{5}{2} a^3 b^2 - \binom{5}{3} a^2 b^3 + \binom{5}{4} a b^4 - b^5.$$

Unter Verwendung des Summenzeichens läßt sich der binomische Lehrsatz auch in kurzer geschlossender Form schreiben:

$$(a + b)^n = \sum_{v=0}^{v=n} \binom{n}{v} a^{n-v} b^v \text{ und } (a - b)^n = \sum_{v=0}^{v=n} (-1)^v \binom{n}{v} a^{n-v} b^v.$$

Man schreibt z. B. bei der Entwicklung der Potenz $(a + b)^5$ in eine Reihe die Koeffizienten (Binominalzahlen) wie folgt:

$\frac{5}{1} = \binom{5}{1}$ gelesen: 5 über 1 $\qquad$ $\frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = \binom{5}{2}$ gelesen: 5 über 2

$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \binom{5}{3}$ gelesen: 5 über 3 $\qquad$ $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \binom{5}{4}$ gelesen: 5 über 4

Für das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ schreibt man kurz 4! (gelesen: 4 Fakultät). Allgemein gilt

n Fakultät: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (n - 1) \cdot n$.