Vektoralgebra

Das skalare Produkt

Mathematik Band III
Dr.-Ing. Wilhelm Leupold, Seite 173, ff.

Auch ich beginne mit dem Beispiel, einen physikalischen Körper längs eines gradlinigen Weges s durch eine dem Weg gleichgerichtete Kraft F zu verschieben. Dazu muß eine Arbeit W aufgewendet werden, so daß

$$W = F \cdot s = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}|.$$

Die Kraft $\vec{F}$ und der Weg $\vec{s}$ sind hierbei vektorielle Größen, die Arbeit W ist eine skalare Größe.

Die Beziehung $W = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}|$ ist aber nur ein spezieller Fall des allgemeineren Falles, daß $\vec{F}$ und $\vec{s}$ nicht gleichgerichtet sind, sondern einen Winkel $\varphi = \sphericalangle(\vec{F}, \vec{s})$ miteinander bilden.

$$\text{Dann ist } W = \vec{F}_s \cdot s = |\vec{F}_s| \cdot |\vec{s}|.$$

Für den Betrag der Komponente von $\vec{F}$ in Richtung von $\vec{s}$, der Projektion von $\vec{F}$ auf die Richtung $\vec{s}$, gilt aber

$$F_s = F \cdot \cos\varphi = F \cdot \cos(\vec{F}, \vec{s}) = |\vec{F}| \cdot \cos(\vec{F}, \vec{s}).$$

Damit erhält man für die Arbeit der Kraft $\vec{F}$ längs des Weges $\vec{s}$ ein Produkt von der Form $W = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos(\vec{F}, \vec{s})$.

Für dieses Produkt schreibt man kurz nur $\vec{F} \cdot \vec{s}$, und man nennt $\vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos(\vec{F}, \vec{s})$

das **skalare Produkt** der beiden Vektoren $\vec{F}$ und $\vec{s}$ (weil das Ergebnis ein Skalar ist)

oder auch das innere Produkt der beiden Vektoren.

Unter dem skalaren Produkt zweier Vektoren versteht man das Produkt aus ihren Beträgen und dem Cosinus des von den beiden Vektoren eingeschlossenen Winkels.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

Bei allen Produktbildungen von Vektoren darf nicht übersehen werden, daß es sich nicht um Produkte im Sinne des Zahlen-Rechnens handelt, sondern daß Produkte von Vektoren aus Gründen der Zweckmäßigkeit eingeführt und definiert werden. Daß Produkte von Vektoren andere Eigenschaften aufweisen als Produkte von Skalaren, erkennt man z. B. beim Untersuchen der Frage, wann $\vec{a} \cdot \vec{b}$ gleich Null sein kann. Zwar gilt auch hier, wie bei jedem Produkt von Zahlen, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, wenn $\vec{a} = \mathbf{o}$ oder $\vec{b} = \mathbf{o}$ oder $\vec{a} = \vec{b} = \mathbf{o}$. Weiterhin folgt aber aus der Definitionsgleichung, daß $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, wenn $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0$, d. h. $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 90°$ oder $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 270°$.

Ein skalares Produkt zweier Vektoren wird gleich Null, wenn wenigstens einer der beiden Vektoren der Nullvektor ist oder wenn die beiden Vektoren senkrecht aufeinanderstehen.

Für die skalare Multiplikation zweier gleicher Vektoren folgt $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0° = a \cdot a \cdot 1 = a^2$.

Damit kann mit Hilfe des skalaren Produktes der **Betrag eines Vektors** $a = |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a^2}$ dargestellt werden, wenn man für $\vec{a} \cdot \vec{a}$ wie allgemein üblich $\vec{a}^2$ schreibt.

Es soll nun noch die Frage der Umkehrbarkeit der skalaren Multiplikation, d. h. die Möglichkeit der Division eines Skalars durch einen Vektor untersucht werden.

Alle Vektoren $\vec{b}_n$, die die gleiche Komponente $\vec{b}_a$ längs eines Vektors $\vec{a}$ besitzen, haben wegen

$|\vec{b}_a| = |\vec{b}_1| \cdot \cos\varphi_1 = |\vec{b}_2| \cdot \cos\varphi_2 = \ldots$ das gleiche Skalarprodukt

$\vec{a} \cdot \vec{b}_a = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}_a| \cdot \cos 0° = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}_1| \cdot \cos\varphi_1 = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}_2| \cdot \cos\varphi_2 = \ldots$

Also kann aus einem vorgegebenen Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ und einem vorgegebenen Vektor $\vec{a}$ der Vektor $\vec{b}$ nicht eindeutig bestimmt werden:

Die skalare Multiplikation läßt sich nicht umkehren. Weiterhin folgt aus den vorstehenden Betrachtungen:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b}_a = \vec{a}_b \cdot \vec{b}$$

Der Wert des skalaren Produktes zweier Vektoren ändert sich nicht, wenn man einen der Vektoren durch seine Komponente längs des anderen ersetzt.